5

QUESTIONS COURTES

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, continue telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} f(t)dt$ converge.

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes, X de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et Y de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (m, μ) pour que

$$P(Y \leqslant X) \geqslant \frac{1}{2}$$

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. On note S (resp. T) la matrice de f (resp. g) dans une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E. On suppose que S est symétrique et A antisymétrique.

Montrer que

$$\forall\, x \in E, \qquad ||(f - g)(x)|| = ||(f + g)(x)||.$$

Soit E l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{C}\,[X]$ vérifiant la relation :

$$\forall\,(z, z') \in \mathbb{C}^{\,2}, \qquad P(zz') = P(z)P(z') \qquad (*).$$

a) Déterminer les polynômes de $\mathbb{C}_{\,1}[X]$ éléments de E.

b) Déterminer tous les polynômes éléments de E.

Dans une file d'attente de n personnes, résultant de la distribution au hasard de ces personnes, se trouvent deux amis Jean et Paul. Quelle est la probabilité que Jean soit séparé de Paul par m personnes ? Quel est le nombre de personnes le plus probable qui séparent Jean et Paul ?

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire. On note F_n (resp. F) la fonction de répartition de X_n (resp. X). On pose

$$d(X_n, X) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)|$$

a) On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(X_n, X) = 0$. Montrer que (X_n) converge en loi vers X.

b) Montrer que la réciproque est fausse (on pourra penser à des lois exponentielles).

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 (f(t))^n dt$, et on suppose que la suite $(I_n)_n$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

1. En raisonnant par l'absurde, montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, $|f(t)| \leqslant 1$.

2. En considérant la suite $(I_{2n})_n$, montrer que pour tout $t \in [0, 1], f(t) \in \{-1, 0, 1\}$.

3. En déduire f.

On retourne une à une les cartes d'un jeu ordinaire (32 cartes). Quel est le nombre moyen de cartes qu'il faut retourner pour voir le premier as ?

---

1. Soit $u \geqslant 1$. Comparer $\ln u$ et $u - 1$.

2. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ telle que $f(0) = 1$ et pour tout $x > 0, f(x) > 1$. Montrer que pour tout $x > 0$

$$[f'(x) \geqslant \frac{1}{\ln(fx)}] \Rightarrow [f(x) \geqslant 1 + \sqrt{2x}]$$