5

QUESTIONS COURTES

1. Montrer que la fonction $F : x \mapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ vérifie les propriétés d'une fonction de répartition.
2. Déterminer la loi de la borne supérieure M_n de n variables aléatoires indépendantes de même loi de fonction de répartition F.
3. Étudier la convergence en loi de la suite $\big(M_n - \ln n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout réel u tel que $|u| \leqslant 1$, $E(u^X)$ existe.
2. Montrer que pour tout $|u| < 1$:

$$\frac{1-E(u^X)}{1-u} = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)u^k$$

Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $p_n = P(N = n)$.
Soit X une variable aléatoire définie sur le même univers Ω et telle que, pour tout $n \in N(\Omega)$, la loi conditionnelle de X sachant $[N = n]$ est la loi uniforme sur $\{0, 1, \dots, n\}$.

1. Comparer la loi de X et celle de $N - X$.
2. Si N suit une loi géométrique de paramètre p, calculer $E(X)$.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}^*$, telle que

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}^*) \qquad P(X = -n) = P(X = n) = \frac{1}{2n(n+1)}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement $[(X = -n) \cup (X = n)]$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X admet une espérance conditionnelle relative à A_n.
Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} E_{A_n}(X)\, P(A_n)$.
La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

Soient trois nombres complexes a, b, c. Calculer la matrice A^7, avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1+i\sqrt{3} & a & b \\ 0 & 1-i\sqrt{3} & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ définie par $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$ et $a_{i,i} > 1$ pour tout i.
Montrer que A est définie positive, c'est-à-dire que A est symétrique réelle telle que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ non nul, ${}^tXAX > 0$.

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ ne sont pas supplémentaires.
A-t-on : $[\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} f$ ou $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f]$?

Soient a et b deux nombres réels et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b + |x|$.

1. A quelle condition sur a et b la fonction f est-elle bijective ?
2. On suppose cette condition remplie. Calculer $f^{-1}(y)$ en fonction de y.

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant :

$$\forall\, x \in [0, +\infty[, 0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^x f(t)dt$$

Soit $h : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

1. Montrer que la fonction h est décroissante.
2. En déduire que la fonction f est identiquement nulle.

Soit un réel a et f une fonction de classe $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, telle que

$$\sup\{|f''(t)|, t \in \mathbb{R}\} = M \in \mathbb{R}.$$

On considère la fonction G définie par :

$$G(x) = \int_a^{a+x} f(u)du - xf(a + \tfrac{x}{2})$$

1. Interpréter géométriquement le nombre $G(x)$, pour f positive et $x > 0$.
2. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ |G'(x)| \leqslant M\frac{x^2}{4}$$

3. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|G(x)| \leqslant M\dfrac{|x|^3}{12}$