# Programme de colle du 10 au 14 juin 2019

**Avertissement important aux colleurs et aux étudiants :**
**— toutes les définitions et tous les résultats figurant au programme de colle sont à connaître,**
**— les démonstrations exigibles sont indiquées sur le programme de colle,**
**— tout point de cours doit être restituable de manière précise et rigoureuse, en conséquence , et même si la notion semble comprise par l'étudiant, un rendu vague, approximatif, incomplet (manque d'hypothèses), confus dans la formulation doit être sanctionné dans une bonne mesure. Les étudiants doivent comprendre que la rigueur ne peut pas s'apprendre avec de l'« à peu près »et que les bonnes habitudes de travail se prennent dès le début de l'année scolaire,**

1. Espaces vectoriels de dimension finie (révisions).
2. Dérivation et accroissements finis.
   - Dérivation
     — Nombre dérivé d'une fonction en un point. Propriété : dérivable $\Longrightarrow$ continue. Dérivée à droite, à gauche.
     — Tangente à une courbe en un point.
     — Dérivation et opérations algébriques : d'érivée d'une somme, d'un produit, d'un inverse et d'un quotient.
     — Dérivation et composition. Dérivée d'une composée. Dérivée d'une fonction réciproque.
   - Dérivées successives .
     — Fonctions $n$ fois dérivables sur $I$. Fonctions de classe $C^n$, $C^\infty$.
     — Formule de Taylor pour les polynômes. Caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine. Dérivée $n$-ème d'un produit : formule de Leibniz.
     — Composition.
   - Accroissements finis.
     — Extremum d'une fonction : définition d'un maximum (resp. minimum) local, global. Propriété : si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admet un extremum local en un point $a$ intérieur à $I$ alors $f'(a) = 0$.
     — Notion de point critique.
     — Théorème de Rolle (avec preuve).
     — Théorème des accroissements finis (avec preuve).
     — Inégalités des accroissements finis (avec preuve).
     — Caractérisation des fonctions monotones parmi les fonctions dérivables. Caractérisation de la monotonie stricte : une fonction $f$ dérivable est strictement croissante ssi $f' \geq 0$ et si l'ensemble des zéros de $f'$ est d'intérieur vide (c'est le cas, par exemple, lorsque $f'$ s'annule en un nombre fini de points en restant positive).
3. Fonctions convexes. (Cours seulement)
   - Définition d'une fonction convexe, d'une fonction concave (par les inégalités). Interprétation géométrique : position de la courbe par rapport à ses cordes. Inégalité

de convexité généralisée : $f$ est convexe ssi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n, \forall (t_1, \dots, t_n) \in [0,1]^n,\ \text{tels que } \sum_{i=1}^{n} t_i = 1,$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i)$$

- Si $f$ est dérivable : $f$ est convexe ssi $f'$ est croissante. Si $f$ est deux fois dérivable : $f$ est convexe ssi $f''$ est positive. Pour une fonction convexe dérivable, position de la courbe par rapport à ses tangentes.