Programme de colle du 27 mai au 7 juin 2019

Avertissement important aux colleurs et aux étudiants :
— toutes les définitions et tous les résultats figurant au programme de colle sont à connaître,
— les démonstrations exigibles sont indiquées sur le programme de colle,
— tout point de cours doit être restituable de manière précise et rigoureuse, en conséquence , et même si la notion semble comprise par l'étudiant, un rendu vague, approximatif, incomplet (manque d'hypothèses), confus dans la formulation doit être sanctionné dans une bonne mesure. Les étudiants doivent comprendre que la rigueur ne peut pas s'apprendre avec de l'« à peu près »et que les bonnes habitudes de travail se prennent dès le début de l'année scolaire,

1. Séries numériques.
   - Langage des séries et généralités. Définition d'une série, des sommes partielles d'une séries, de la convergence d'une série, de la somme d'une série. Condition nécessaire de convergence. Séries géométriques. Reste d'ordre n d'une série. Linéarité.
   - Séries à termes positifs. Condition nécessaire et suffusante de CV d'une série à termes ≥ 0. Règle de comparaison des séries à termes ≥ 0. Conséquence : utilisation des relations de comparaison : $\sim$ et o. Séries de Riemann : CNS de CV.
   - Convergence absolue. Séries à termes de signe quelconque. CVA implique CV mais réciproque fausse : exemple de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.
   - Série exponentielle.
   - Séries dérivées d'une série géométrique.
2. Espaces vectoriels de dimension finie.
   - Somme de plusieurs sev. Somme directe de plusieurs sev. Caractérisation d'une somme directe de k sev par $\sum_i x_i = 0_E \Longrightarrow \forall i, x_i = 0_E$.
   - Caractérisation des sommes directes par la concaténation des bases. Notion de base adaptée à une somme directe.
   - Compléments sur les familles libres et génératrices. Théorème de l'échange.
   - Espace vectoriel de dimension finie. Théorème de la dimension.
   - En dim n, toute famille libre possède au plus n vecteurs et toute famille génératrice possède au moins n vecteurs.
   - En dim n, toute famille libre de cardinal n est une base et toute famille génératrice de cardinal n est une base.
   - Théorème de la base incomplète.
   - Conséquences : liens entre dimension, familles libres, familles génératrices.
   - Sous espaces vectoriels de dimension finie.
     - Un sev F d'un ev E de dimension finie est de dimension finie et dim $F \leq$ dim E avec égalité ssi $F = E$.
     - Tout sev F d'un ev de dimension finie possède un supplémentaire
     - Formule de Grassmann (avec preuve)
     - Droite vectorielle, plan vectoriel, hyperplan : définition.

- Applications linéaires en dimension finie. Rang.
  - Rang d'une famille finie de vecteurs. Propriétés. Rang d'une application linéaire.
  - Théorème du rang (avec preuve).
  - Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité à l'aide du rang.
  - Caractérisation des isomorphismes (et des automorphismes) en dimension finie.

3. Dérivation et accroissements finis (**En cours seulement**)
   - Dérivation
     - Nombre dérivé d'une fonction en un point. Propriété : dérivable $\Longrightarrow$ continue. Dérivée à droite, à gauche.
     - Tangente à une courbe en un point.
     - Dérivation et opérations algébriques : d'érivée d'une somme, d'un produit, d'un inverse et d'un quotient.
     - Dérivation et composition. Dérivée d'une composée. Dérivée d'une fonction réciproque.
   - Dérivées successives .
     - Fonctions n fois dérivables sur I. Fonctions de classe C^n, C^∞.
     - Formule de Taylor pour les polynômes. Caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine. Dérivée n-ème d'un produit : formule de Leibniz.
     - Composition.
   - Accroissements finis.
     - Extremum d'une fonction : définition d'un maximum (resp. minimum) local, global. Propriété : si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admet un extremum local en un point a intérieur à I alors $f'(a) = 0$.
     - Notion de point critique.
     - Théorème de Rolle (avec preuve).
     - Théorème des accroissements finis (avec preuve).
     - Inégalités des accroissements finis (avec preuve).
     - Caractérisation des fonctions monotones parmi les fonctions dérivables. Caractérisation de la monotonie stricte : une fonction f dérivable est strictement croissante ssi $f' \geq 0$ et si l'ensemble des zéros de f' est d'intérieur vide (c'est le cas, par exemple, lorsque f' s'annule en un nombre fini de points en restant positive).