Programme de colle du 08 au 12 avril 2019

Avertissement important aux colleurs et aux étudiants :
— toutes les définitions et tous les résultats figurant au programme de colle sont à connaître,
— les démonstrations exigibles sont indiquées sur le programme de colle,
— tout point de cours doit être restituable de manière précise et rigoureuse, en conséquence , et même si la notion semble comprise par l'étudiant, un rendu vague, approximatif, incomplet (manque d'hypothèses), confus dans la formulation doit être sanctionné dans une bonne mesure. Les étudiants doivent comprendre que la rigueur ne peut pas s'apprendre avec de l'« à peu près »et que les bonnes habitudes de travail se prennent dès le début de l'année scolaire,

Ce programme tient sur deux pages

1. Limites et continuité[1] (On ne proposera pas aux élèves d'exercices nécessitant la définition quantifiée des limites.)
   - Généralités : fonctions majorées, minorées, bornées, paires, impaires, périodiques.
   - Limites d'une fonction.
     $$I \subset \mathbb{R} \text{ de la forme } \begin{cases} |a,b| \text{ avec } a<b \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et } x_0 \text{ un élément de } I \text{ ou une extrémité de } I \\ \text{ou } |a,x_0[\cup]x_0,b| \text{ avec } a<x_0<b \text{ dans } \overline{\mathbb{R}} \\ \text{ou } |a,+\infty[\text{ ou }]-\infty,b|,\ (a,b\in\overline{\mathbb{R}}) \text{ et } x_0=\pm\infty \end{cases}$$
     — Limite finie en un point de I ou une extrémité finie de I[2], limite finie en $\pm\infty$, limites infinies.
     — Propriétés des limites finies : unicité de la limite, si $\lim_{x_0} f = \ell > 0$ alors $f > 0$ au voisinage de x_0
     — Limites à droite, limites à gauche
     — Définition de la continuité. Traduction en ε, η.
     — Théorème de prolongement par continuité
   - Règles de calculs sur les limites.
     — Limites et relation d'ordre : théorème de comparaisons, théorème d'existence d'une limite par encadrement.
     — Limites et opérations algébriques.
     — Composition de limites
     — Opérations sur les fonctions continues.
   - Image continue d'un intervalle.
     — Théorème des valeurs intermédiaires. Enoncés équivalents sous forme de corollaires : théorème de Bolzano et l'image par une fonction continue d'un intervalle est un intervalle.
     — Théorème de compacité (ou des théorème des bornes) : si f est C^0 sur un segment alors f est bornée et atteint ses bornes sur ce segment.

1. Les démonstrations des résultats de cette rubrique ne sont pas exigibles. Les élèves doivent cependant connaitre parfaitement les énoncés des définitions et résultats de cette rubrique
2. $(\forall\varepsilon>0)(\exists\eta>0)(\forall x\in I)(|x-x_0|\leq\eta \Longrightarrow |f(x)-\ell|\leq\varepsilon)$

- Fonctions monotones.
  — Fonc. croissantes, décroissantes. Thm de la limite monotone. Théorème de la bijection.
- Fonction arctangente : définition et propriétés (monotonie, parité, limites en $\pm\infty$, continuité, dérivabilité)

2. Variables aléatoires : cas des univers finis.
   - Variables aléatoires réelles.
     — Variables aléatoires finies. Systèmes complet d'évènements associé à une VAR.
     — Loi d'une var finie. Représentation.
     — Variable aléatoire indicatrice d'un événement.
     — Fonction de répartition d'une var finie. Propriétés :
       — a) F_X est croissante sur $\mathbb{R}$, possède des limites à droite et à gauche en tout point de $\mathbb{R}$: $\lim\limits_{x^+} F_X = F_X(x)$, $\lim\limits_{x^-} F_X = P(X < x)$.
       — b) La fonction de répartition caractérise la loi : deux var ayant même fonction de répartition suivent la même loi.
       — c) $\lim\limits_{-\infty} F_X = 0$, $\lim\limits_{+\infty} F_X = 1$.
       — c) La fonction de répartition permet de déterminer la loi de X : pour tout $x \in X(\Omega)$ on a $P([X = x]) = P(X \leq x) - P(X < x)$
     — Transformation d'une var. : si X est une var finie et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ alors $Y = g(X)$ est une vard. Expression de la loi de $Y = g(X)$ en fonction de celle de X.

- Espérance et variance.
  — Espérance : définition. Propriétés :
    — a) positivité de l'espérance
    — b) Si $X \geq 0$ et si $E(X) = 0$ alors $X = 0$ p-s. (i.e. $P(X = 0) = 1$) (avec preuve).
    — c) $E(aX + b) = aE(X) + b$ (avec preuve)
    — d) linéarité de l'espérance (*hors-programme en 1ere année mais la propriété a été admise donc peut être employée dans les exercices*).
    Définition d'une var centrée.
  — Théorème de transfert : si X est une var finie et $g : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ alors $E(g(X)) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$.
  — Variance : définition. Propriétés :
    — a)$V(X) \geq 0$ et $V(X) = 0$ ssi $X = E(X)$ p-s. (i.e. $P(X = E(X)) = 1$).
    — b)$V(aX + b) = a^2 V(X)$
    — c) Formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
  — Définition de l'écart-type. Var centrée réduite.
  — Loi de Bernoulli, loi binômiale, loi uniforme. Espérance et variance pour chacune de ces lois.
    Les calculs d'espérance et de variance sont exigibles en question de cours. Les étudiants doivent être capable d'associer une situation de référence type à chaque loi.

3. Théorème de changement de variable dans une intégrale (On donnera une intégrale ou une primitive à calculer par changement de variable à chaque étudiant pour s'assurer que la méthode est comprise.).

4. Etude asymptotique des suites (Aucun exercice pour le moment).