Programme de colle du 25 au 30 mars 2019

Avertissement important aux colleurs et aux étudiants :

- toutes les définitions et tous les résultats figurant au programme de colle sont à connaître,
 - les démonstrations exigibles sont indiquées sur le programme de colle,
 - **tout point de cours doit être restituable de manière précise et rigoureuse, en conséquence, et même si la notion semble comprise par l'étudiant, un rendu vague, approximatif, incomplet (manque d'hypothèses), confus dans la formulation doit être sanctionné dans une bonne mesure. Les étudiants doivent comprendre que la rigueur ne peut pas s'apprendre avec de l'« à peu près » et que les bonnes habitudes de travail se prennent dès le début de l'année scolaire,**
-

Ce programme tient sur deux pages

1. Applications linéaires.

- Définition d'une application linéaire. Vocabulaire : endomorphisme, isomorphisme, automorphisme. Notations $\mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{L}(E)$, $GL(E)$. Opérations sur les applications linéaires.
- Noyau, Image d'une application linéaire. Caractérisation de l'injectivité (avec preuve). Caractérisation de la surjectivité.
- Effet d'une applic. linéaire sur une famille de vecteurs : l'image par $f \in \mathcal{L}(E, F)$ d'une famille liée est liée (+contaposée) et l'image d'une famille génératrice de E est génératrice de $\text{Im}f$.
- f est un isomorphisme ssi l'image d'une base est une base
- Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base.
- Définition d'une projection vectorielle et d'un projecteur.

2. Limites et continuité¹ (On ne proposera pas aux élèves d'exercices nécessitant la définition quantifiée des limites.)

- Généralités : fonctions majorées, minorées, bornées, paires, impaires, périodiques.
- Limites d'une fonction.

$$I \subset \mathbb{R} \text{ de la forme } \begin{cases} |a, b| \text{ avec } a < b \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et } x_0 \text{ un élément de } I \text{ ou une extrémité de } I \\ \text{ou } |a, x_0[\cup]x_0, b| \text{ avec } a < x_0 < b \text{ dans } \overline{\mathbb{R}} \\ \text{ou } |a, +\infty[\text{ ou }] - \infty, b|, (a, b \in \overline{\mathbb{R}}) \text{ et } x_0 = \pm\infty \end{cases}$$
 - Limite finie en un point de I ou une extrémité finie de I^2 , limite finie en $\pm\infty$, limites infinies.
 - Propriétés des limites finies : unicité de la limite, si $\lim_{x_0} f = \ell > 0$ alors $f > 0$ au voisinage de x_0
 - Limites à droite, limites à gauche
 - Définition de la continuité. Traduction en ε, η .

1. Les démonstrations des résultats de cette rubrique ne sont pas exigibles. Les élèves doivent cependant connaître parfaitement les énoncés des définitions et résultats de cette rubrique

2. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \eta > 0)(\forall x \in I)(|x - x_0| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$

- Théorème de prolongement par continuité
- Règles de calculs sur les limites.
 - Limites et relation d'ordre : théorème de comparaisons, théorème d'existence d'une limite par encadrement.
 - Limites et opérations algébriques.
 - Composition de limites
 - Opérations sur les fonctions continues.
- Image continue d'un intervalle.
 - Théorème des valeurs intermédiaires. Énoncés équivalents sous forme de corollaires : théorème de Bolzano et l'image par une fonction continue d'un intervalle est un intervalle.
 - Théorème de compacité (ou des théorème des bornes) : si f est C^0 sur un segment alors f est bornée et atteint ses bornes sur ce segment.
- Fonctions monotones.
 - Fonc. croissantes, décroissantes. Thm de la limite monotone. Théorème de la bijection.
- Fonction arctangente : définition et propriétés (monotonie, parité, limites en $\pm\infty$, continuité, dérivabilité)