Programme de colle du 18 au 22 fév. 2019

Avertissement important aux colleurs et aux étudiants :
— toutes les définitions et tous les résultats figurant au programme de colle sont à connaître,
— les démonstrations exigibles sont indiquées sur le programme de colle,
— tout point de cours doit être restituable de manière précise et rigoureuse, en conséquence , et même si la notion semble comprise par l'étudiant, un rendu vague, approximatif, incomplet (manque d'hypothèses), confus dans la formulation doit être sanctionné dans une bonne mesure. Les étudiants doivent comprendre que la rigueur ne peut pas s'apprendre avec de l'« à peu près »et que les bonnes habitudes de travail se prennent dès le début de l'année scolaire,

Ce programme tient sur deux pages

1. Polynômes à une indéterminée.
   - Suites à support fini. Définitions d'un polynôme [1], de l'addition et produit de deux polynômes, et du produit d'un polynôme par un scalaire.
   - Ensemble $\mathbb{K}[X]$. Identification des polynômes constants avec les scalaires.
   - Degré d'un polynôme. Coefficient dominant. Relations entre les degrés de deux polynômes et ceux de leur somme et produit.
   - Composition de polynômes.
   - Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$. Polynôme dérivé d'une somme, d'un produit et d'une composée de polynômes.
   - Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$. Pratique.
   - Racine d'un polynôme. Ordre de multiplicité d'une racine. Caractérisation de l'ordre de multiplicité par les polynômes dérivés (la formule de Taylor pour les polynômes a été vue ici).
   - Théorème de D'Alembert-Gauss (admis). Factorisation des polynômes dans $\mathbb{C}[X]$. Caractérisation des polynômes réels parmi les polynômes complexes : si $P \in \mathbb{C}[X]$ alors $P \in \mathbb{R}[X]$ ssi pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$. Factorisation des polynômes dans $\mathbb{R}[X]$. Exemples de factorisations.
2. Applications linéaires (Cours seulement)
   - Définition d'une application linéaire. Vocabulaire : endomorphisme, isomorphisme, automorphisme. Notations $\mathcal{L}(E,F), \mathcal{L}(E), GL(E)$. Opérations sur les applications linéaires.
   - Noyau, Image d'une application linéaire. Caractérisation de l'injectivité (avec preuve). Caractérisation de la surjectivité.
   - Effet d'une applic. linéaire sur une famille de vecteurs : l'image par $f \in \mathcal{L}(E,F)$ d'une famille liée est liée (+contaposée) et l'image d'une famille génératrice de E est génératrice de $\mathrm{Im} f$.

1. Un polynôme est défini comme « une expression $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_k X^k$ »associée à une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à support fini. On ne soulèvera pas de difficulté à ce sujet

- f est un isomorphisme ssi l'image d'une base est une base
- Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base.