Programme de colle du 3 au 8 déc. 2018

Avertissement important aux colleurs et aux étudiants :
— toutes les définitions et tous les résultats figurant au programme de colle sont à connaître,
— les démonstrations exigibles sont indiquées sur le programme de colle,
— tout point de cours doit être restituable de manière précise et rigoureuse, en conséquence , et même si la notion semble comprise par l'étudiant, un rendu vague, approximatif, incomplet (manque d'hypothèses), confus dans la formulation doit être sanctionné dans une bonne mesure. Les étudiants doivent comprendre que la rigueur ne peut pas s'apprendre avec de l'« à peu près »et que les bonnes habitudes de travail se prennent dès le début de l'année scolaire,

1. Calcul matriciel.
   - Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ Définition d'une matrice. Matrices lignes, colonnes. Matrices carrées, diagonales, triangulaires. Matrices transposées.
   - Opérations dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
     — Addition de 2 matrices et multiplication par un scalaire. Matrices élémentaires $E_{i,j}$.
     — Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne, produit d'une matrice et d'une matrice colonne, expression du coefficient général d'un produit de deux matrices. Propriétés relatives aux opérations sur les matrices.
     — Stabilité pour le produit de l'ensemble des matrices diagonales, de l'ensemble des matrices triangulaires.
   - Matrices inversibles. Ensemble $GL_n(\mathbb{K})$.
     — Définition. Inverse d'un produit. Caractérisation d'une matrice inversible : A est inversible ssi $X = 0$ est l'unique solution de l'éq. $AX = 0$. Condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice diagonale ou triangulaire soit inversible.
     — Calcul de l'inverse d'une matrice.
     1) Si $AB = I_n$ alors A est inversible et $A^{-1} = B$.
     2) Pratique du calcul de l'inverse d'une matrice : application de l'algorithme de Gauss.
     — Inversibilité des matrices 2×2 et expression de l'inverse.
   - Transposition.
     — Prorpiété de la transposition : transposée d'une somme, d'un produit et ${}^t({}^tA) = A$.
     — Transposition et inversibilité : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi ${}^tA$ est inversible.
     — Matrice symétrique et antisymétrique.
2. Formule du binôme (On donnera des exercices portant sur des développements algébriques. Des exercices portant sur le plan combinatoire peuvent être envisagés mais ne doivent pas être trop avancés.)
   — Coefficient binômial : introduit comme nombre de chemins r'́alisant k succès dans l'arbre associé à n répétitions d'une épreuve à deux issues, puis obtenu comme

nombre de façons de choisir k objets parmi n. Propriété de symétrie, formule de Pascal (avec preuve) et formule d'absorption-extraction (avec preuve).

— Expression de $\binom{n}{k}$ à l'aide de factorielles.

— Formule du binôme. Interprétation de $\binom{n}{k}$ comme coefficient de x^k dans $(1+x)^n$. Les sommes suivantes ont été vues en classe et doivent être connues des étudiants :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$$

3. Probabilités sur un univers fini (Interrogation en cours seulement).

— Langage des probabilités : expérience aléatoire, univers, éventualité ou issue ou possible, événement, événement certain, événement impossible. Evénement élémentaire.

— Opérations sur les évènements : événement contraire, réunion et intersection, implication, événements incompatibles.

— Définition d'une loi de probabilité pour un univers fini. Propriétés vis à vis des opérations ensemblistes : $P(E\backslash F)$, $P(E\cup F)$, $P(\overline{E})$

— Propriétés vis à vis des systèmes complets d'événements (SCE). Formule des probabilités totales : développement de $P(A)$ à l'aide d'un SCE sans conditionnement.

— Equiprobabilité.

— Probabilité conditionnelle. Formule des probabilités composées. Formule des probabilités totales (avec conditionnement).

— Indépendance de deux événements. Indépendance deux à deux et indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements.